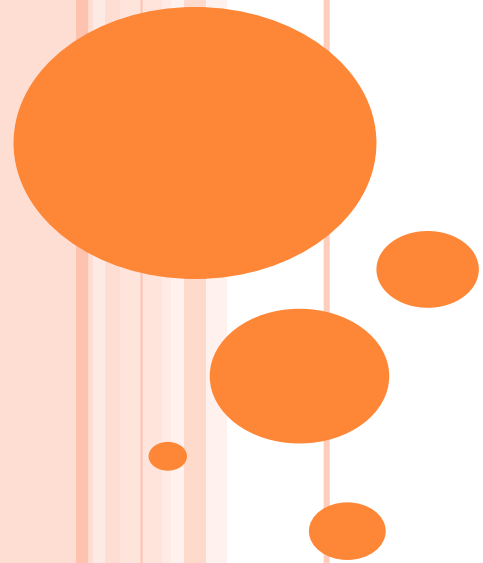


به نام خدا

بیشترین جریان Max-Flow



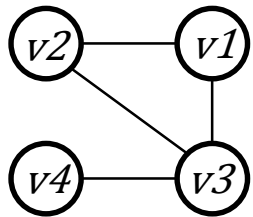
کاربرد بیشترین جریان

○ یکی از کاربردهای بیشترین جریان در بخش بندی تصویر است.

مروری بر تئوری گراف

○ تعریف مفهومی گراف: یک مدل ریاضی برای نمایش ارتباط دودویی بین مجموعه‌ای از اشیاء است.

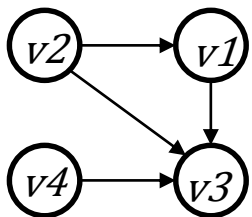
○ تعریف ریاضی گراف: هر گراف با استفاده از زوج مرتب $G = (V, E)$ تعریف می‌شود که در آن V مجموعه رئوس و E مجموعه یال‌ها هستند.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$$

○ گراف جهت‌دار: اگر در یال‌های گراف رأس ابتدایی و انتهایی هر یال مشخص باشد به آن گراف جهت‌دار می‌گوییم.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

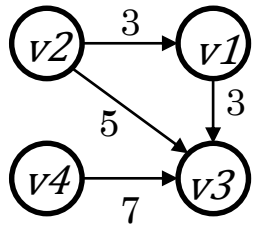
$$E = \{(v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_3)\}$$

مروری بر تئوری گراف (ادامه)

- گراف جهت دار و وزن دار: گراف جهت داری که به هر یال آن یک عدد حقیقی مثبت به عنوان وزن (ظرفیت) آن یال اختصاص داده شده باشد.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

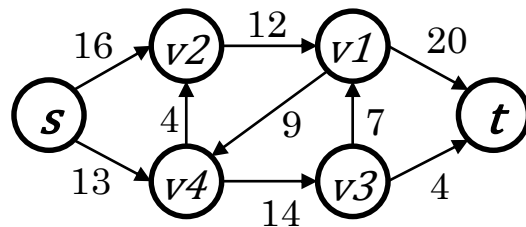
$$E = \{(v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_3)\}$$



$$C(v_1, v_2) = 2, C(v_1, v_3) = 3$$

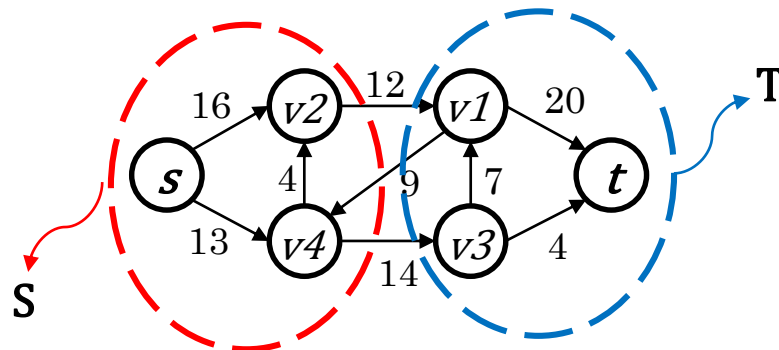
$$C(v_2, v_3) = 5, C(v_4, v_3) = 7$$

- گراف s-t: یک گراف جهت دار و وزن دار است با دو گره خاص s و t، یکی به عنوان گره منبع (source) و دیگری به عنوان گره چاهک (sink).



مروری بر تئوری گراف (ادامه)

- برش $s-t$ $([S, T])$: شامل تقسیم‌بندی گره‌های گراف به دو مجموعه S و T است به گونه‌ای که مجموعه S شامل تمام رئوس قابل دستیابی از s است. مابقی رئوس گراف در مجموعه T قرار می‌گیرند.



- ظرفیت یک برش $s-t$: برابر با مجموع ظرفیت تمام یال‌هایی است که ابتدای آن‌ها در مجموعه S و انتهای آن‌ها در مجموعه T قرار داشته باشد.

$$C[S, T] = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} C(u, v) = C(v_2, v_1) + C(v_4, v_3) = 12 + 14 = 26$$

مروری بر تئوری گراف (ادامه)

○ جریان در یک گراف S-t به صورت نگاشتی از مجموعه یال ها به اعداد حقیقی مثبت تعریف می شود که شرایط زیر را روی یال های گراف داشته باشد.

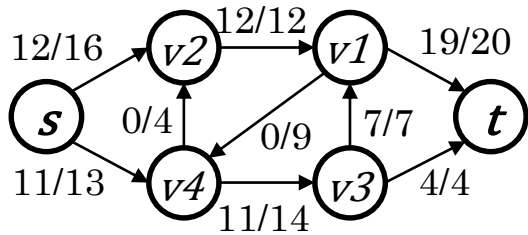
$$\left\{ \begin{array}{l} f: V \times V \rightarrow R^+ \\ f(u, v) \leq C(u, v) \\ \sum_v f(u, v) = \sum_v f(v, u) \end{array} \right.$$

○ مقدار جریان در یک گراف S-t برابر با مجموع جریان عبوری از گره S به گره t است.

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{u \in V} f(u, t)$$

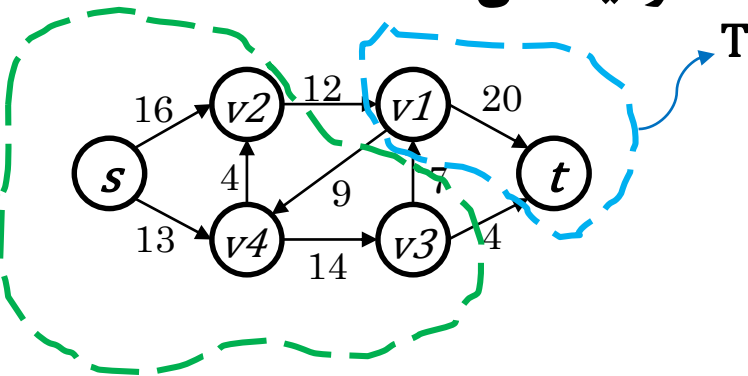
جریان بیشینه – برش کمینه

مسئله جریان بیشینه: در این مسئله، هدف به دست آوردن بیشترین مقدار $|f|$ است که به معنای یافتن مسیرهایی از s به t با بیشترین جریان عبوری می باشد.



$$\max(|f|) = 23$$

مسئله برش کمینه: این مسئله، شامل یافتن یک برش در گراف است که ظرفیت آن از تمام برش های گراف کمتر باشد.



$$C[S, T] = 12 + 7 + 4 = 23$$

جریان بیشینه – برش کمینه (ادامه)

- قضیه جریان بیشینه-برش کمینه: مقدار جریان بیشینه در یک گراف $s-t$ برابر با ظرفیت برش کمینه در آن گراف است.
- الگوریتم‌های مختلفی برای به دست آوردن جریان بیشینه در یک گراف $s-t$ وجود دارد که ما در ادامه به تشریح یکی از پرکاربردترین آن‌ها به نام الگوریتم فورد-فولکرسون (Ford-Fulkerson) خواهیم پرداخت.

الگوریتم فورد-فولکرسون

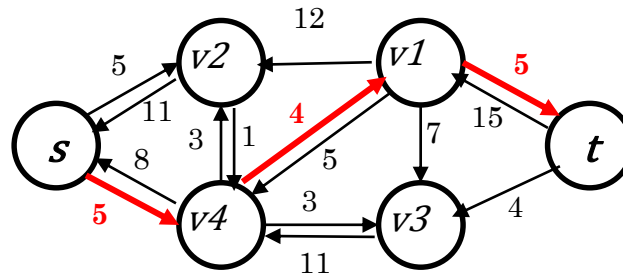
○ شبکه پسماند G_f (residual network): گرافی است که با شرایط زیر از روی یک گراف $s-t$ به دست می آید:

- رئوس شبکه پسماند همان رئوس گراف $s-t$ است.
- یال‌های شبکه پسماند شامل دو دسته‌اند:
 - اگر در گراف $s-t$ جریان $f(u,v)$ برابر با $C(u,v)$ باشد، در شبکه پسماند یال (u,v) نخواهیم داشت.
 - اگر در گراف $s-t$ جریان $f(u,v)$ کمتر از $C(u,v)$ باشد، در شبکه پسماند یال (u,v) با ظرفیت $C_f(u,v)$ $= C(u,v) - f(u,v)$ و یال (v,u) با ظرفیت $C_f(v,u) = f(u,v)$ وجود خواهد داشت.



الگوریتم فورد-فولکرسون (ادامه)

○ مسیر افزایشی در شبکه پسماند (P): مسیری ساده از S به t در شبکه پسماند



○ ظرفیت مسیر افزایشی (C_P): کوچکترین ظرفیت یک یال در مسیر افزایشی

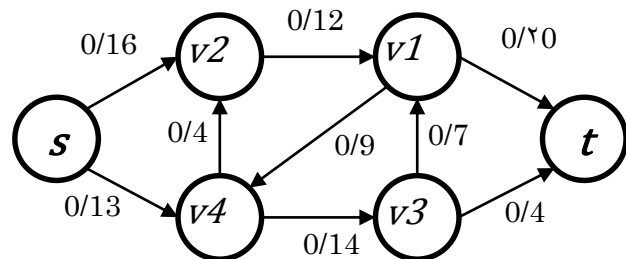
$$C_P = 4$$

الگوریتم فورد- فولکرسون (ادامه)

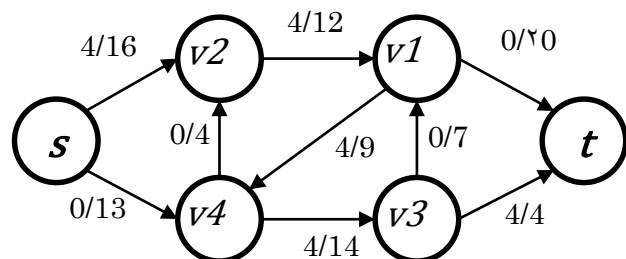
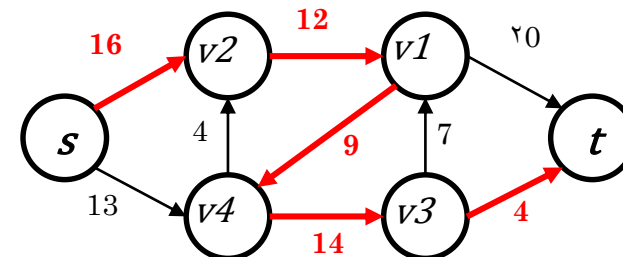
○ مراحل الگوریتم:

- (۱) با مقدار جریان $|f| = 0$ شروع می‌کنیم.
- (۲) در هر مرحله از روی گراف $s-t$ شبکه پسماند را به دست می‌آوریم.
- (۳) یک مسیر افزایشی دلخواه در شبکه پسماند را پیدا کرده و ظرفیت آن مسیر را محاسبه می‌کنیم.
- (۴) مقدار جریان در یال‌های آن مسیر در گراف $s-t$ را به اندازه ظرفیت مسیر افزایش می‌دهیم.
- (۵) مراحل ۲ تا ۴ را تا زمانی ادامه می‌دهیم که در شبکه پسماند هیچ مسیر افزایشی یافت نشود.

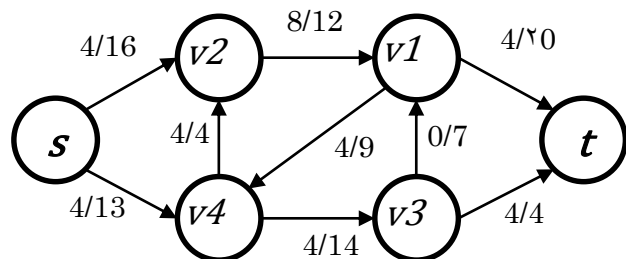
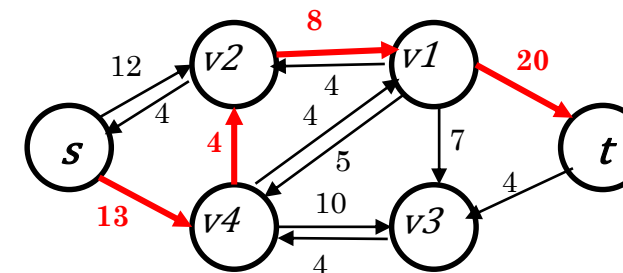
الگوریتم فورد-فولکرسون (ادامه)



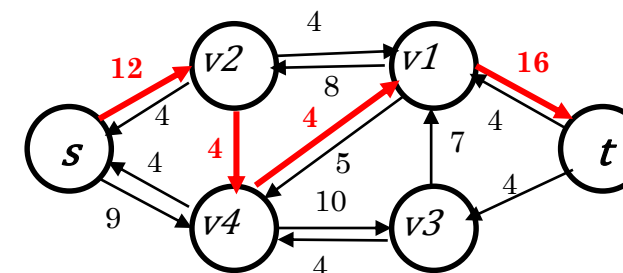
$|f| = 0$
شبکه پسماند



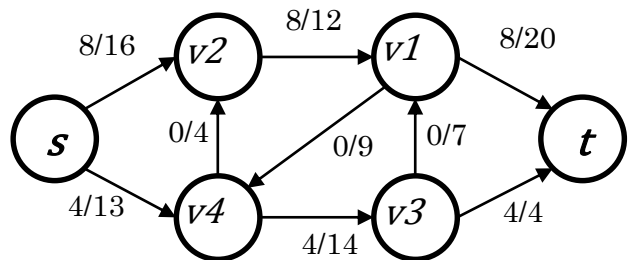
$|f| = 4$
شبکه پسماند



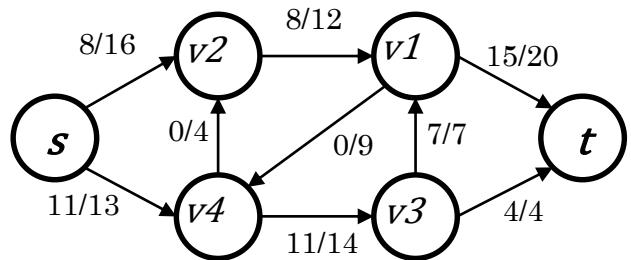
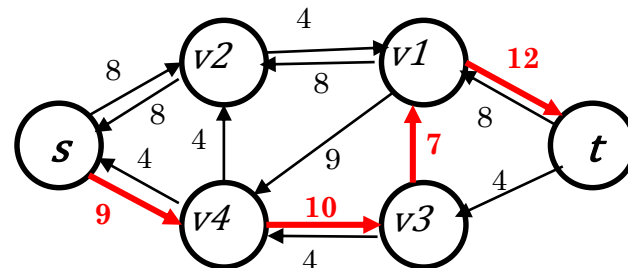
$|f| = 8$
شبکه پسماند



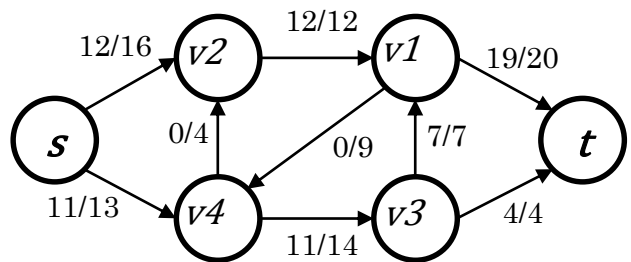
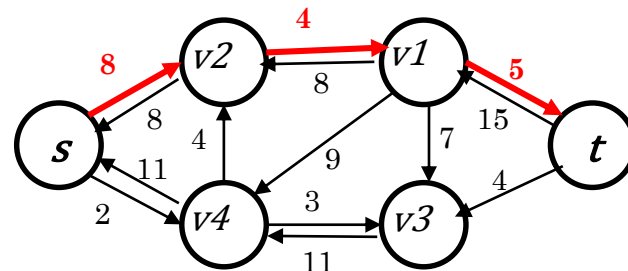
الگوریتم فورد-فولکرسون (ادامه)



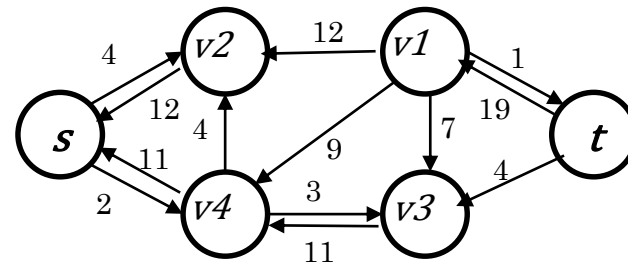
$|f| = 12$
شبکه پسماند



$|f| = 19$
شبکه پسماند



$|f| = 23$
شبکه پسماند



برش کمینه

- مجموعه برش E_{cut} را به مجموعه یال‌هایی اطلاق می‌کنیم که جریان در آن‌ها به حداکثر رسیده باشد.
- برش کمینه گراف، افراز رئوس گراف به دو زیر مجموعه S و T است، به گونه‌ای که ابتدای تمام یال‌های موجود در مجموعه E_{cut} در مجموعه S و انتهای آن‌ها در مجموعه T باشد.

